

# MRA ile İmge Bölütleme ve Sınır Sahipliği Problemlerinin Eş Zamanlı Çözümü

## An MRF Framework For Co-Solving Image Segmentation and Border Ownership

Ozge Oztimur Karadag  
Bilgisayar Mühendisliği Bölümü  
Akdeniz Üniversitesi  
Antalya, Türkiye  
karadag@akdeniz.edu.tr

Mehmet Akif Akkuş  
Bilgisayar Mühendisliği Bölümü  
Orta Doğu Teknik Üniversitesi  
Ankara, Türkiye  
akifakkus@ceng.metu.edu.tr

Sinan Kalkan, Fatos T. Yarman Vural  
Bilgisayar Mühendisliği Bölümü  
Orta Doğu Teknik Üniversitesi  
Ankara, Türkiye  
{skalkan,vural}@ceng.metu.edu.tr

**Özetçe** —İmge bölütleme ve sınır sahipliği tespiti bilgisayarlı gözü literatüründe oldukça yaygın olarak çalışılan ve görsel algılamada önemli role sahip problemlerdir. Bu çalışmada, imge bölütleme ve sınır sahipliği tespitini eş zamanlı olarak gerçekleştiren Markov Rasgele Alan tabanlı bir çözüm önerilmektedir. Önerilen sistemin performansı nitelik ve nicelik bakımından analiz edilmektedir.

**Anahtar Kelimeler**—*imge bölütleme, sınır sahipliği, Markov Rasgele Alanları.*

**Abstract**—Image segmentation and border ownership assignment are two widely studied areas in the computer vision literature. It is well known that both the segmentation and the border ownership assignment play an important role in the visual perception. In this study, a Markov Random Fields model which provides a dual solution for the segmentation and the border ownership assignment is proposed. The proposed system is analyzed both quantitatively and qualitatively.

**Keywords**—*image segmentation, border ownership, Markov Random Fields.*

### I. GİRİŞ

İmge bölütleme, bir imgeyi anlamlı bölgelere ayırma işlemidir. Görüntü işleme problemlerinin büyük bir kısmında, bu işleme ihtiyaç duyulması dolayısı ile imge bölütleme literatürde oldukça yaygın çalışılan bir problemdir. Buna rağmen, imge bölütlemeye hala çözülmeyi bekleyen problemler bulunmaktadır. Bunlardan en önemlisi, anlamsal açıklık (semantic gap) olarak ifade edilen ve imgeden çıkarılan öznitelikler ile imgede var olan anlamsal bilgi arasında ilişki kurulamaması problemidir. Anlamsal açıklık, bölütleme sonucunun herhangi bir anlamsal karşılığı olmayan bölütler elde etmesine sebep olmaktadır. Bu problemin etkisini azaltmak amacı ile, son yıllarda imge bölütleme çalışmaları, nesne tanıma ile birlikte çözülmeye çalışılmaktadır [1]–[3]. Bu çalışmalarda amaç, bölütleme sonucunda elde edilecek bölütlerin, bir takım nesnelere ya da nesne parçalarına ait olmasını sağlamaktır.

Sınır Sahipliği Tespiti, iki bölüt arasındaki sınırın, bölütlerden hangisine ait olduğunun tespit edilmesidir. Sınır sahipliğinden elde edilen veriler, nesne-zemin ayırımının belirlenmesinde, nesne tanıma, derinlik tespitinde kritik önem taşımaktadır.

Literatürde genellikle sınır sahipliği problemi, referans bir imge üzerinde sınır sahipliğinin tespit edilmesi şeklinde ele alınmıştır [4]. Bu çalışmaların büyük kısmında, doğru bölütlemenin bilindiği varsayılmıştır. Oysa ki, gerçek problemlerde çoğunlukla doğru bölütleme bilinmemektedir. Bu nedenle, imge bölütleme ve sınır sahipliği problemlerinin birarada çözülmesi her iki problemin de daha verimli sonuçlar elde edebilmesi ve gerçek uygulamalarda kullanılabilir hale gelmesi açısından önem teşkil etmektedir.

Bu çalışmada, imge bölütleme ve sınır sahipliği problemlerini eş zamanlı olarak çözen bir yaklaşım önerilmektedir. Bu amaçla, görüntü işleme problemlerinde yaygın olarak kullanılan Markov Rasgele Alanları (MRA) kullanılmaktadır.

### II. LİTERATÜR

İmge bölütleme problemi son yıllarda anlamsal imge bölütleme, nesne tanıma tabanlı imge bölütleme gibi adlarla anılarak, bölütleme ve nesne tanıma problemleri birarada çözülmeye çalışılmaktadır [2], [3]. Bu çalışmalarda grafik modellerin, MRA tabanlı sistemlerin yaygın olarak kullanıldığı görülmektedir. Bunda en büyük etken MRA modelinin, mevcut verileri ve bağlamsal ilişkileri bölütleme işlemine dahil etmeye uygun olmasıdır.

Literatürde sınır sahipliği tespitinde genellikle eğrilik, yüzeylerin dış bükey-iç bükey olma durumları, kontrastları ve tespit edilen köşelerden çıkarılan bilgiler kullanılmaktadır [5]–[8]. Bu amaçla, çoğunlukla yapay imgeler kullanılmakta olup, 2013 yılında Akkuş ve arkadaşları tarafından [9] sınır sahipliği tespiti çalışmalarında kullanılmak üzere iç ve dış mekan imgelerden oluşan bir veri kümesi oluşturulmuştur.

İnsan görme sisteminde sınır sahipliği bilgisinin algılamaya etkisi uzun yıllardır çalışılıyor olmasına ve nesne tanıma sınır sahipliği bilgisinin kullanıldığı tespit edilmiş olmasına

rağmen [10], [11], bilgisayarlı görüde sınır sahipliği problemini imge bölütleme ya da nesne tanıma ile birlikte ele alan çok fazla çalışma bulunmamaktadır. İon ve arkadaşları elde ettikleri olası şekil-zemin ihtimalleri arasından en uygun olanını seçmek için tanımladıkları enerji fonksiyonunda, sınır sahipliği bilgisinden faydalanmaktadır [6]. Mishra ve arkadaşları sınır sahipliği bilgisini bölütleme için başlangıç noktaları (fixation points) bulmak amacı ile kullanmayı önermişlerdir [7]. Maire ise etiketlenmiş veri kümesini kullanarak bölütleme ve şekil-zemin organizasyonun çözülmesi problemlerini aynı anda çözmek amacı ile bir açısal gömme (angular embedding) sistemi önermiştir [8]. Bu çalışmalarda amaç sınır sahipliği bilgisini kullanarak bölütlemeyi iyileştirmek veya bölütlemeye ek olarak şekil-zemin organizasyonu ya da diğer bir deyişle göreceli derinlik bilgisini sunmaktır.

### III. İMGE BÖLÜTLEME VE SINIR SAHİPLİĞİ TESPİTİ

Bu çalışmada imge bölütleme ve sınır sahipliği problemlerini MRA kullanılarak eşzamanlı olarak çözen bir yöntem önerilmektedir.

Öncelikle MRA ile imge görüntülemenin nasıl formüle edildiği açıklanacak, ardından bu formülasyonun sınır sahipliğini çözmek üzere nasıl güncellendiği anlatılacaktır.

#### A. MRA ile İmge Bölütleme

MRA görüntü işleme çalışmalarında yaygın olarak kullanılan bir yöntemdir. Bu yöntemde, her bir pikselin ya da süper pikselin,  $s_i$ , tanımlanan bir komşuluk ilişkisine  $N$  dayanılarak etiketlenmesi ile bir konfigürasyon,  $w$ , elde edilir. Bu konfigürasyonun olasılığı  $P(w)$  Hammersley-Clifford teoremi [12] aracılığı ile Gibbs Dağılımı kullanılarak aşağıdaki denklem ile modellenebilir:

$$P(w) = \frac{1}{Z} \exp(-U(w)). \quad (1)$$

Burada  $Z$  bir normalizasyon katsayısı,  $U(w)$  ise genellikle aşağıdaki gibi bir denklem ile ifade edilen bir enerji fonksiyonudur:

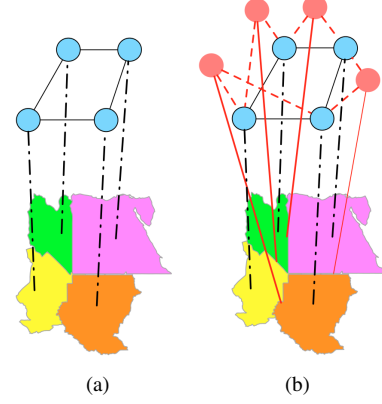
$$U(w) = \sum_{s_i \in S} \psi_i(s_i) + \sum_{s_i \in S, s_j \in N_{s_i}} \psi_{ij}(s_i, s_j). \quad (2)$$

Burada  $s_i \in S$  bir süper piksel,  $s_j \in N_{s_i}$  ise  $N$  komşuluk ilişkisine göre  $s_i$ 'nin bir komşusudur. Enerji fonksiyonu, genellikle iki terimden oluşur. İlk terim birinci dereceden klik enerjisi ya da veri terimi olarak ifade edilir ve Şekil 1a'da grafik düğümleri ile temsil edilir. Bu grafikte, her bir düğüm bir süper piksel'i temsil etmektedir. Birinci terim, özneliklerin normal dağılım gösterdiği varsayılarak süper piksel  $s_i$ 'ye verilen etiketin negatif log olasılığı şeklinde modellenir.

İkinci terim, ikinci dereceden klik enerjisi ya da akıcılık terimi olarak ifade edilir ve Şekil 1a'da düğümler arasındaki bağlantılar ile temsil edilir. Bu terimin modellenmesinde kullanılan Potts model [13] aşağıdaki gibidir:

$$\psi_{ij}(s_i, s_j) = \begin{cases} 0 & \text{if } s_i = s_j \\ \beta & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3)$$

Denklem 2 ile ifade edilen enerji fonksiyonunun minimize edilmesi ile elde edilen konfigürasyon  $w$ , imgedeki tüm pikselin etiketlendiği bir bölütleme ortaya çıkmasını sağlar. Enerji fonksiyonunu minimize etmek amacı ile grafik-kes(me) (graph-cut) algoritmasına dayanan bir yöntem kullanılmıştır [14].



Şekil 1: (a) MRA ile Bölütleme Yapısı (b) MRA ile Bölütleme ve Sınır Sahipliği Tespiti Yapısı (en iyi renkli görünür)

#### B. MRA ile İmge Bölütleme ve Sınır Sahipliği Tespiti

MRA ile imge bölütleme ve sınır sahipliği tespiti problemlerini eş zamanlı çözmek amacı ile Şekil 1a Şekil 1b'deki gibi güncellenmiştir. Bu grafikte, komşu iki süper piksel,  $s_i$  ve  $s_j$  arasındaki sınır  $p_{ij}$  kırmızı düğüm ile gösterilmiştir. Mavi düğümler alan düğümleri, kırmızı düğümler sınır düğümleridir ve veri terimi hem de kırmızı düğümleri içermektedir. Akıcılık teriminde ise süper pikseller arasındaki komşuluk ilişkisinin yanı sıra, her bir sınır ile o sınıra komşu olan süper pikseller arasındaki ilişki yer almaktadır. Enerji fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$U(w) = \sum_{s_i \in S} \psi_i(s_i) + \sum_{p_{ij} \in P} \psi_i(p_{ij}) + \sum_{s_i \in S, s_j \in N_{s_i}} \psi_{ij}(s_i, s_j) + \sum_{s_i \in S, s_j \in N_{s_i}} \psi_{ij}(s_i, p_{ij}) + \psi_{ij}(s_j, p_{ij}). \quad (4)$$

Bu formülasyon MRA ile Bölütleme ve Sınır Sahipliği Tespiti Temel ( $MRABSS_{temel}$ ) olarak adlandırılmıştır. Bu yöntem, sınır düğümlerinin komşu oldukları alan düğümlerinden farklı etiketleri alabilmesine izin vermektedir. Sınır düğümlerinin komşu alan düğümlerinden birisinin etiketini almasını sağlamak amacı ile MRA enerjisi güncellenmiştir. Bu amaçla, enerji fonksiyonunda sınır düğümlerine ait veri terimlerini temsil eden ikinci terim sıfır olarak belirlenmiştir. Bu durumda sınır düğümlerinin etiketlenmesi sadece akıcılık terimine göre belirlenmektedir. Sınırın düğümünün, komşu alan düğümlerinden hangisinin etiketini alacağını belirlemek üzere, kontrast bilgisi kullanılmış ve MRA enerjisi aşağıdaki gibi güncellenmiştir:

$$\begin{aligned}
U(w) = & \sum_{s_i \in S} \psi_i(s_i) + \sum_{s_i \in S, s_j \in N_{s_i}} \psi_{ij}(s_i, s_j) \\
& + \sum_{s_i \in S, s_j \in N_{s_i}} [c_{s_i, p_{ij}} \times \psi_{ij}(s_i, p_{ij}) + c_{s_j, p_{ij}} \times \psi_{ij}(s_j, p_{ij})].
\end{aligned} \tag{5}$$

Bu formülde,  $c_{s_i, p_{ij}}$ , süper piksel  $s_i$  ile kendisine komşu olan sınır süper pikselinin  $p_{ij}$  arasında Potts Model ile tanımlanan akıcılık teriminin ağırlığını belirler. Ağırlık terimi,  $s_i$  süper pikselinin kontrastı  $k_{s_i}$  ile  $p_{ij}$  sınır süper pikselinin kontrastı  $k_{p_{ij}}$  kullanılarak aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$c_{s_i, p_{ij}} = 1 + \exp(-1 \times |k_{s_i} - k_{p_{ij}}|). \tag{6}$$

Bu denklem ağırlık teriminin [1,2] aralığında bir değer almasını sağlar. Eğer süper piksel ile kendisine komşu olan sınır süper pikselinin arasındaki kontrast farkı az ise iki süper piksel arasındaki akıcılık teriminin ağırlığı daha yüksek bir değer olacaktır. Benzer şekilde, iki süper pikselin kontrast farkı çok ise, akıcılık teriminin ağırlığı daha az olacaktır.

Bölütleme ve sınır sahipliği tespiti problemlerini eş zamanlı olarak çözebilen bu yöntem Sınır Sahipliği Tespiti Gelişmiş ( $MRABSS_{gelişmiş}$ ) olarak isimlendirilmiştir.

#### IV. DENEYLER

Deneylerimizde 500 imgeden oluşan Berkeley Bölütleme veri kümesi [15] kullanılmıştır. Önerilen yöntemin performansı hem sayısal hem de göresel olarak analiz edilmiştir. Bu amaçla,  $MRABSS_{temel}$  ve  $MRABSS_{gelişmiş}$  yöntemlerinin yanı sıra MRA ile Bölütleme çıktıları elde edilmiş ve bu çıktılar karşılaştırmada kullanılmıştır. Süper pikseller Mean Shift [16] Bölütleme algoritması ile elde edilmiştir.

##### A. Performans Ölçütleri

Sayısal analizde Rand Olasılık İndeksi (Probabilistic Rand Index) [17] ve Küresel Tutarlılık Hatası (Global Consistency Error) [15] ölçütleri bölütleme performansının değerlendirilmesinde kullanılmıştır. Ayrıca, bölütleme performansını tek bir kriter üzerinden analiz edebilmek amacı ile bu iki ölçütü birarada kullanan Bölütleme Derecesi ölçütü önerilmiştir.

**Rand Olasılık İndeksi** Rand Olasılık İndeksi (RO) [17], pikselleri ikiye bölünmüş gruplar halinde alıp, verilen iki bölütlemeye bu iki pikselin aynı şekilde bölütlenip bölütlenmediğini kontrol eder. Verilen bir grup ground-truth bölütleme  $S_k$  ile elde edilen bölütlemeye  $S_{test}$  benzer şekilde gruplanmış piksellerin oranını aşağıdaki formül ile hesaplar:

$$RO(S_{test}, S_k) = \frac{1}{\binom{N}{2}} \sum_{i < j} [c_{ij} p_{ij} + (1 - c_{ij})(1 - p_{ij})]. \tag{7}$$

**Küresel Tutarlılık Hatası** Küresel Tutarlılık Hatası [15] verilen iki bölütleme arasındaki tutarlılığı hesaplamaya yönelik bir ölçüttür. Bu yöntemde öncelikle, verilen iki bölütlemeye piksel  $p_i$ 'a sahip olan iki bölüt  $S_1$  ve  $S_2$  arasındaki tutarlılık hatası aşağıdaki formül ile hesaplanır:

$$H(S_1, S_2, p_i) = \frac{|R(S_1, p_i) \setminus R(S_2, p_i)|}{R(S_1, p_i)}. \tag{8}$$

Tablo I: MRA ile Bölütleme,  $MRABSS_{temel}$  ve  $MRABSS_{gelişmiş}$  yöntemlerinin ROİ, KTH ve Bölütleme Derecesi ölçütlerine göre bölütleme performanslarının karşılaştırılması

	ROİ	KTH	Bölütleme Derecesi
<i>MRA ile Bölütleme</i>	0.76	0.21	0.77
<i>MRABSS<sub>temel</sub></i>	0.75	0.22	0.76
<i>MRABSS<sub>gelişmiş</sub></i>	0.75	0.19	<b>0.78</b>

Bu denklem kullanılarak Küresel Tutarlılık Hatası aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$KTH(S_1, S_2) = \frac{1}{n} \min \left\{ \sum_i H(S_1, S_2, p_i), \sum_i H(S_2, S_1, p_i) \right\}. \tag{9}$$

KTH ve ROİ, [0, 1] arasında değerler alır. Bölütleme performansı iyileştikçe, KTH değeri düşüş, ROİ değeri ise artış gösterir.

**Bölütleme Derecesi** ROİ ve KTH ölçütlerini birarada kullanarak performans analizi yapmak amacı ile önerilen Bölütleme Derecesi denklemi aşağıdaki gibidir:

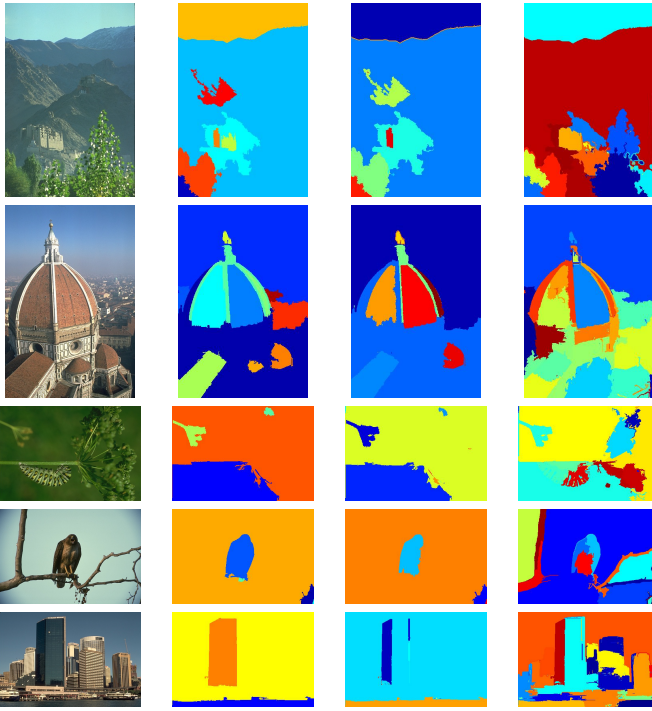
$$BölütlemeDerecesi = \frac{2 \times RO \times (1 - KTH)}{RO + (1 - KTH)}. \tag{10}$$

##### B. Deney Sonuçları

Veri seti üzerinde MRA ile bölütleme,  $MRABSS_{temel}$  ve  $MRABSS_{gelişmiş}$  yöntemleri uygulanmış elde edilen çıktıların ROİ, KTH ve Bölütleme Derecesi değerleri Tablo I'de verilmiştir. Bu tablodaki sonuçlara göre,  $MRABSS_{temel}$ 'in bölütleme performansının düşmesine sebep olduğu ancak  $MRABSS_{gelişmiş}$ 'in bölütleme performansını düşürmeden, hem bölütleme hem de sınır sahipliği problemlerini eş zamanlı olarak çözebildiği görülmüştür.

Şekil 2'de üç yöntemin çıktıları örnek resimler ile verilmiştir. Birinci kolonda veri kümesinden örnek resimler, ikinci kolonda MRA ile bölütleme sonuçları, üçüncü kolonda  $MRA_{temel}$  ile bölütleme ve sınır sahipliği tespiti sonuçları, dördüncü kolonda ise  $MRA_{gelişmiş}$  ile elde edilen sonuçlar yer almaktadır. Birinci satırda yer alan imgenin  $MRA_{temel}$  çıktısında, gökyüzü ile dağlar arasındaki sınırın komşularından farklı bir etiket aldığı görülmektedir.  $MRA_{gelişmiş}$ 'te bu problemin ortadan kalktığını görülmektedir. Her ne kadar, sayısal analizler önerilen yöntem ile bölütlemeye bir iyileştirme olduğuna işaret etmese de, Şekil 2'deki çıktılar, sınır sahipliği hesaplamalarının bölütlemeye de iyileştirme sağladığını göstermektedir.

Sınır sahipliği tespiti çalışmaları, çoğunlukla doğru bölütlemenin ve sınır piksellerinin bilindiğini varsaymaktadır. Sınır sahipliği problemi bu şekilde tanımlandığı takdirde, performans ölçümü el ile etiketlenmiş sınır bilgisi ile tespit edilen sınır sahipliği bilgisi karşılaştırılarak yapılabilmektedir. Bizim problem tanımımızda ise, imge bölütleme ve sınır sahipliği tespiti eş zamanlı gerçekleştirilmektedir. Dolayısı ile hem tespit edilen sınır pikselleri, gerçek sınır pikselleri ile hem de elde edilen bölütler gerçek bölütlerle tam olarak örtüşmemekte



Şekil 2: Birinci kolon orijinal imge, ikinci, üçüncü ve dördüncü kolonlar sırası ile MRA ile bölütleme,  $MRABSS_{temel}$  ve  $MRABSS_{gelişmiş}$  yöntemlerinin sonuçlarıdır (en iyi renkli görünür).



Şekil 3: Örnek bir imge için bölütleme ve sınır sahipliği tespiti sonucu (en iyi renkli görünür)

ve nicel olarak performans ölçümü yapılamamaktadır. Sınır sahipliği tespiti performansını görsel olarak analiz etmek amacı ile Şekil 3 verilmiştir. Şekilde, sınır sahipliği doğru olarak tespit edilen pikseller siyah renkte, yanlış olarak tespit edilen pikseller beyaz renkte gösterilmiştir. Gerçekte sınır olmadığı halde, sınır olarak tespit edilen pikseller belirtilmemiştir.

## V. SONUÇ

Bu çalışma ile, imge bölütleme ve sınır sahipliği tespiti problemlerinin eş zamanlı olarak çözen bir yöntem önerilmiştir. Önerilen yöntem MRA kullanarak, bölütleri ve bölütler arasındaki sınırları eş zamanlı olarak etiketlemektedir. Literatürde, bu iki problemin eş zamanlı çözümüne yönelik çok az sayıda çalışma bulunmaktadır. Oysa ki, araştırmalar hem sınır sahipliği bilgisinin hem de bölütlemenin görsel algıda önemli role sahip olduğuna ve birbirini beslediğine işaret etmektedir. Bu çalışmada, sınır sahipliği ipuçlarından sadece kontrast bilgisi kullanılmış ve sınır sahipliği için yapılan güncellenen MRA'nın daha hassas bir bölütleme elde etmesini

sağladığı gözlemlenmiştir. Bu ön çalışma yapılan gözlemlere ve elde edilen sonuçlara dayanılarak gelecekte, sınır sahipliğine ait diğer ipuçlarının da MRA enerjisine yerleştirilmesi ve imge bölütleme performansının daha iyileştirilmesi hedeflenmektedir.

## TEŞEKKÜR

Bu çalışma, 111E155 numaralı proje kapsamında TÜBİTAK tarafından desteklenmektedir.

## KAYNAKÇA

- [1] E. Borenstein and S. Ullman, "Class-specific, top-down segmentation," in *Proceedings of the 7th European Conference on Computer Vision-Part II, ECCV 2002*. London, UK, UK: Springer-Verlag.
- [2] S. Gould, J. Rodgers, D. Cohen, G. Elidan, and D. Koller, "Multi-class segmentation with relative location prior," *Int. J. Comput. Vision*, vol. 80, no. 3, pp. 300–316, Dec. 2008.
- [3] D. Larlus and F. Jurie, "Combining appearance models and markov random fields for category level object segmentation," in *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, CVPR 2008*.
- [4] X. Ren, C. Fowlkes, and J. Malik, "Figure/ground assignment in natural images," in *Computer Vision – ECCV 2006*, ser. Lecture Notes in Computer Science, A. Leonardis, H. Bischof, and A. Pinz, Eds. Springer Berlin Heidelberg, 2006, vol. 3952, pp. 614–627.
- [5] B. Ozkan and S. Kalkan, "Extraction of border ownership information by conditional random field model," in *Signal Processing and Communications Applications Conference (SIU), 2013 21st*.
- [6] A. Ion, J. Carreira, and C. Sminchisescu, "Image segmentation by figure-ground composition into maximal cliques," in *IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV), 2011*.
- [7] A. Mishra, A. Shrivastava, and Y. Aloimonos, "Segmenting simple objects using rgb-d," in *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), 2012*.
- [8] M. Maire, "Simultaneous segmentation and figure/ground organization using angular embedding," in *Computer Vision – ECCV 2010*, ser. Lecture Notes in Computer Science, K. Daniilidis, P. Maragos, and N. Paragios, Eds. Springer Berlin Heidelberg, 2010, vol. 6312, pp. 450–464.
- [9] M. Akkus, G. Topuz, B. Ozkan, and S. Kalkan, "A comprehensive database for border ownership," in *Signal Processing and Communications Applications Conference (SIU), 2013 21st*.
- [10] H. Zhou, H. S. Friedman, and R. V. D. Heydt, "Coding of border ownership in monkey visual cortex," *Journal of Neuroscience*, vol. 20, pp. 6594–6611, 2000.
- [11] F. T. Qiu and R. V. D. Heydt, "Figure and ground in the visual cortex: v2 combines stereoscopic cues with gestalt rules," *Neuron*, pp. 155–166, 2005.
- [12] R. Smith, "Introduction to besag (1974) spatial interaction and the statistical analysis of lattice systems," in *Breakthroughs in Statistics*, ser. Springer Series in Statistics, S. Kotz and N. Johnson, Eds. Springer New York, 1997, pp. 285–323.
- [13] R. J. Baxter, *Exactly solved models in statistical mechanics*. London: Academic Press, 1982.
- [14] Y. Boykov, O. Veksler, and R. Zabih, "Fast approximate energy minimization via graph cuts," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 23, no. 11, pp. 1222–1239, Nov 2001.
- [15] D. Martin, C. Fowlkes, D. Tal, and J. Malik, "A database of human segmented natural images and its application to evaluating segmentation algorithms and measuring ecological statistics," in *Proc. 8th Int'l Conf. Computer Vision*, 2001, pp. 416–423.
- [16] D. Comaniciu and P. Meer, "Mean shift: a robust approach toward feature space analysis," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 24, no. 5, pp. 603–619, May 2002.
- [17] R. Unnikrishnan and M. Hebert, "Measures of similarity," in *7th IEEE Workshop on Applications of Computer Vision / IEEE Workshop on Motion and Video Computing (WACV/MOTION 2005)*, Breckenridge, CO, USA.